PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Muchos problemas de ingeniería, ciencia, y administración, requieren que se tome una decisión entre aceptar o rechazar una proposición sobre algún parámetro. Esta proposición recibe el nombre de **hipótesis.** Este es uno de los aspectos más útiles de la inferencia estadística, puesto que muchos tipos de problemas de toma de decisiones, pruebas o experimentos en el mundo de la ingeniería, pueden formularse como problemas de prueba de hipótesis.
Una **hipótesis estadística** es una proposición o supuesto sobre los parámetros de una o más poblaciones.

Suponiendo que se tiene interés en la rapidez de combustión de un agente propulsor sólido utilizado en los sistemas de salida de emergencia para la tripulación de aeronaves. El interés se centra sobre la rapidez de combustión promedio. De manera específica, el interés recae en decir si la rapidez de combustión promedio es o no 50 cm/s. Esto puede expresarse de manera formal como:

H_o; $\mu = 50$ cm/s

H_1; $\mu \neq 50$ cm/s

La proposición H_o; $\mu = 50$ cm/s, se conoce como **hipótesis nula**, mientras que la proposición H_1; $\mu \neq 50$ cm/s, recibe el nombre de **hipótesis alternativa.** Puesto que la hipótesis alternativa especifica valores de μ que pueden ser mayores o menores que 50 cm/s, también se conoce como **hipótesis alternativa bilateral.**

En algunas situaciones, lo que se desea es formular una **hipótesis alternativa unilateral**, como en

H_o; $\mu = 50$ cm/s H_o; $\mu = 50$ cm/s

ó

H_1; $\mu < 50$ cm/s H_1; $\mu > 50$ cm/s

Es importante recordar que las hipótesis siempre son proposiciones sobre la población o distribución bajo estudio, no proposiciones sobre la muestra. Por lo general, el valor del parámetro de la población especificado en la hipótesis nula se determina en una de tres maneras diferentes:

1. Puede ser resultado de la experiencia pasada o del conocimiento del proceso, entonces el objetivo de la prueba de hipótesis usualmente es determinar si ha cambiado el valor del parámetro.
2. Puede obtenerse a partir de alguna teoría o modelo que se relaciona con el proceso bajo estudio. En este caso, el objetivo de la prueba de hipótesis es verificar la teoría o modelo.
3. Cuando el valor del parámetro proviene de consideraciones externas, tales como las especificaciones de diseño o ingeniería, o de obligaciones contractuales. En esta situación, el objetivo usual de la prueba de hipótesis es probar el cumplimiento de las especificaciones.

Un procedimiento que conduce a una decisión sobre una hipótesis en particular recibe el nombre de **prueba de hipótesis**. Los procedimientos de prueba de hipótesis dependen del empleo de la información contenida en la muestra aleatoria de la población de interés. Si esta información es consistente con la hipótesis, se concluye que ésta es verdadera; sin embargo si esta información es inconsistente con la hipótesis, se concluye que esta es falsa. Debe hacerse hincapié en que la verdad o falsedad de una hipótesis en particular nunca puede conocerse con certidumbre, a menos que pueda examinarse a toda la población. Usualmente esto es imposible en muchas situaciones prácticas. Por tanto, es necesario desarrollar un procedimiento de prueba de hipótesis teniendo en cuenta la probabilidad de llegar a una conclusión equivocada.

- La **hipótesis nula,** representada por H_o, es la afirmación sobre una o más características de poblaciones que al inicio se supone cierta (es decir, la "creencia a priori").

- La **hipótesis alternativa,** representada por H_1, es la afirmación contradictoria a H_o, y ésta es la hipótesis del investigador.

La hipótesis nula se rechaza en favor de la hipótesis alternativa, sólo si la evidencia muestral sugiere que H_o es falsa. Si la muestra no contradice decididamente a H_o, se continúa creyendo en la validez de la hipótesis nula. Entonces, las dos conclusiones posibles de un análisis por prueba de hipótesis son ***rechazar H_o o no rechazar H_o.***

Prueba de una Hipótesis Estadística

Para ilustrar los conceptos generales, considere el problema de la rapidez de combustión del agente propulsor presentado con anterioridad. La hipótesis nula es que la rapidez promedio de combustión es 50 cm/s, mientras que la hipótesis alternativa es que ésta no es igual a 50 cm/s. Esto es, se desea probar:

H_o; $\mu = 50$ cm/s

H_1; $\mu \neq 50$ cm/s

Supóngase que se realiza una prueba sobre una muestra de 10 especímenes, y que se observa cual es la rapidez de combustión promedio muestral. La media muestral es un estimador de la media verdadera de la población. Un valor de la media muestral $\bar{x}$ que este próximo al valor hipotético $\mu = 50$ cm/s es una evidencia de que el verdadero valor de la media μ es realmente 50 cm/s; esto es, tal evidencia apoya la hipótesis nula H_o. Por otra parte, una media muestral muy diferente de 50 cm/s constituye una evidencia que apoya la hipótesis alternativa H_1. Por tanto, en este caso, la media muestral es el estadístico de prueba.

La media muestral puede tomar muchos valores diferentes. Supóngase que si $48.5 \leq \bar{x} \leq 51.5$, entonces no se rechaza la hipótesis nula H_o; $\mu = 50$ cm/s, y que si $\bar{x} < 48.5$ ó $\bar{x} > 51.5$, entonces se acepta la hipótesis alternativa H_1; $\mu \neq 50$ cm/s.

Los valores de $\bar{x}$ que son menores que 48.5 o mayores que 51.5 constituyen la ***región crítica*** de la prueba, mientras que todos los valores que están en el intervalo $48.5 \leq \bar{x} \leq 51.5$ forman la ***región de aceptación***. Las fronteras entre las regiones crítica y de aceptación reciben el nombre de ***valores críticos.*** La costumbre es establecer conclusiones con respecto a la hipótesis nula H_o. Por tanto, se rechaza H_o en favor de H_1 si el estadístico de prueba cae en la región crítica, de lo contrario, no se rechaza H_o.

Este procedimiento de decisión puede conducir a una de dos conclusiones erróneas. Por ejemplo, es posible que el valor verdadero de la rapidez promedio de combustión del agente propulsor sea igual a 50 cm/s. Sin embargo, para todos los especímenes bajo prueba, bien puede observarse un valor del estadístico de prueba $\bar{x}$ que cae en la región crítica. En este caso, la hipótesis nula H_o será rechazada en favor de la alternativa H_1cuando, de hecho, H_o en realidad es verdadera. Este tipo de conclusión equivocada se conoce como ***error tipo I.***

El **error tipo I** se define como el rechazo de la hipótesis nula H_o cuando ésta es verdadera. También es conocido como α **ó nivel de significancia.**

Si tuviéramos un nivel de confianza del 95% entonces el nivel de significancia sería del 5%. Análogamente si se tiene un nivel de confianza del 90% entonces el nivel de significancia sería del 10%.

Ahora supóngase que la verdadera rapidez promedio de combustión es diferente de 50 cm/s, aunque la media muestral $\bar{x}$ caiga dentro de la región de aceptación. En este caso se acepta H_o cuando ésta es falsa. Este tipo de conclusión recibe el nombre de ***error tipo II.***

El **error tipo II ó error** β se define como la aceptación de la hipótesis nula cuando ésta es falsa.

Por tanto, al probar cualquier hipótesis estadística, existen cuatro situaciones diferentes que determinan si la decisión final es correcta o errónea.

Decisión	**H_o es verdadera**	**H_o es falsa**
Aceptar H_o	No hay error	Error tipo II ó β
Rechazar H_o	Error tipo I ó α	No hay error

1. Los errores tipo I y tipo II están relacionados. Una disminución en la probabilidad de uno por lo general tiene como resultado un aumento en la probabilidad del otro.
2. El tamaño de la región crítica, y por tanto la probabilidad de cometer un error tipo I, siempre se puede reducir al ajustar el o los valores críticos.
3. Un aumento en el tamaño muestral *n* reducirá α y β de forma simultánea.
4. Si la hipótesis nula es falsa, β es un máximo cuando el valor real del parámetro se aproxima al hipotético. Entre más grande sea la distancia entre el valor real y el valor hipotético, será menor β

.

PASOS PARA ESTABLECER UN ENSAYO DE HIPOTESIS INDEPENDIENTEMENTE DE LA DISTRIBUCION QUE SE ESTE TRATANDO

1. Interpretar correctamente hacia que distribución muestral se ajustan los datos del enunciado.
2. Interpretar correctamente los datos del enunciado diferenciando los parámetros de los estadísticos. Así mismo se debe determinar en este punto información implícita como el tipo de muestreo y si la población es finita o infinita.
3. Establecer simultáneamente el ensayo de hipótesis y el planteamiento gráfico del problema. El ensayo de hipótesis está en función de ***parámetros*** ya que se quiere evaluar el universo de donde proviene la muestra. En este punto se determina el tipo de ensayo (unilateral o bilateral).

4. Establecer la regla de decisión. Esta se puede establecer en función del valor crítico, el cual se obtiene dependiendo del valor de α (Error tipo I o nivel de significancia) o en función del estadístico límite de la distribución muestral. Cada una de las hipótesis deberá ser argumentada correctamente para tomar la decisión, la cual estará en función de la hipótesis nula o H_o.
5. Calcular el estadístico real, y situarlo para tomar la decisión.
6. Justificar la toma de decisión y concluir.

Tipos de Ensayo

Se pueden presentar tres tipos de ensayo de hipótesis que son:

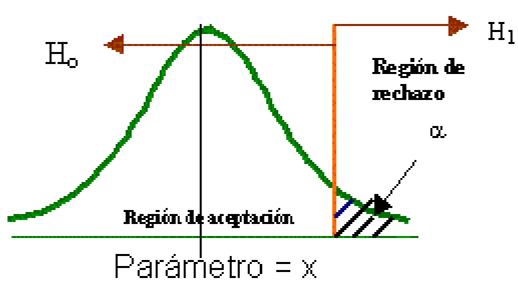
- Unilateral Derecho
- Unilateral Izquierdo
- Bilateral

Dependiendo de la evaluación que se quiera hacer se seleccionará el tipo de ensayo.

- Unilateral Derecho. El investigador desea comprobar la hipótesis de un aumento en el parámetro, en este caso el nivel de significancia se carga todo hacia el lado derecho, para definir las regiones de aceptación y de rechazo.

Ensayo de hipótesis:

H_o; Parámetro $\leq$ x



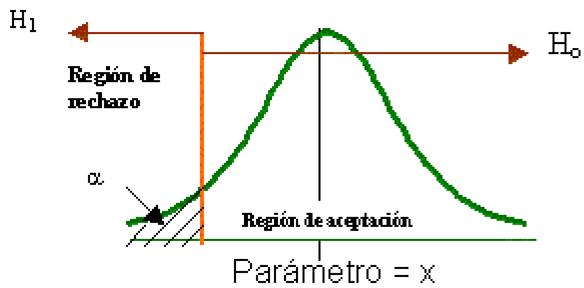
H_1; Parámetro > x

- Unilateral Izquierdo: El investigador desea comprobar la hipótesis de una disminución en el parámetro, en este caso el nivel de significancia se carga todo hacia el lado izquierdo, para definir las regiones de aceptación y de rechazo.

Ensayo de hipótesis:

H_o; Parámetro $\geq$ x

H_1; Parámetro < x

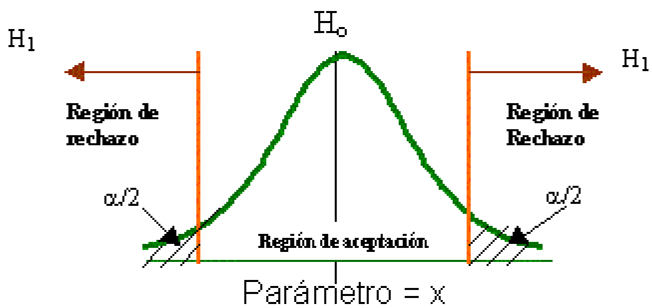


- Bilateral: El investigador desea comprobar la hipótesis de un cambio en el parámetro. El nivel de significancia se divide en dos y existen dos regiones de rechazo.

Ensayo de hipótesis:

H_o; Parámetro = x

H_1; Parámetro $\neq$ x



Para realizar los ejemplos y ejercicios de ensayo de hipótesis se recomienda seguir los pasos mencionados anteriormente. Los ejemplos siguientes se solucionarán por los pasos recomendados, teniéndose una variedad de problemas en donde se incluirán a todas las distribuciones muestrales que se han visto hasta aquí.

Ejemplos:

1. Una muestra aleatoria de 100 muertes registradas en Estados Unidos el año pasado muestra una vida promedio de 71.8 años. Suponga una desviación estándar poblacional de 8.9 años, ¿esto parece indicar que la vida media hoy en día es mayor que 70 años? Utilice un nivel de significancia de 0.05.

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de medias con desviación estándar conocida.**
2. **Datos:**

μ=70 años

σ **= 8.9 años**

$\bar{x}$ **= 71.8 años**

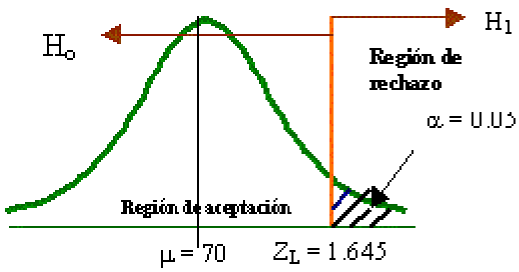
n = 100

α **= 0.05**

3. **Ensayo de hipótesis**

H_o; μ = 70 años.

H_1; μ > 70 años.



4. **Regla de decisión:**

Si $z_R \leq$ 1.645 no se rechaza H_o.

Si z_R> 1.645 se rechaza H_o.

5. **Cálculos:**

$$Z_R = \frac{\bar{x}_R - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{71.8 - 70}{8.9 / \sqrt{100}} = 2.02$$

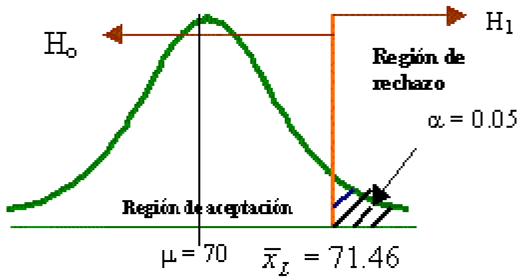
6. **Justificación y decisión.**

Como 2.02 >1.645 se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia del 0.05 que la vida media hoy en día es mayor que 70 años.

Existe otra manera de resolver este ejercicio, tomando la decisión en base al estadístico real, en este caso la media de la muestra. De la fórmula de la distribución muestral de medias se despeja la media de la muestra:

$$Z_L = \frac{\bar{x}_L - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$\bar{x}_L = \mu + \frac{Z_L \sigma}{\sqrt{n}} = 70 + \frac{(1.645)(8.9)}{\sqrt{100}} = 71.46$$



Regla de decisión:

Si $\bar{x}_R \leq 71.46$ No se rechaza H_o

Si $\bar{x}_R > 71.46$ Se rechaza H_o

Como la media de la muestral es de 71.8 años y es mayor al valor de la media muestral límite de 71.46 por lo tanto se rechaza H_o y se llega a la misma conclusión.

2. Una empresa eléctrica fabrica focos que tienen una duración que se distribuye de forma aproximadamente normal con una media de 800 horas y una desviación estándar de 40 horas. Si una muestra aleatoria de 30 focos tiene una duración promedio de 788 horas, ¿muestran los datos suficiente evidencia para decir que la duración media ha cambiado? Utilice un nivel de significancia del 0.04.

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de medias con desviación estándar conocida.**

2. **Datos:**

μ=800 horas

σ = 40 horas

$\bar{x}$ = 788 horas

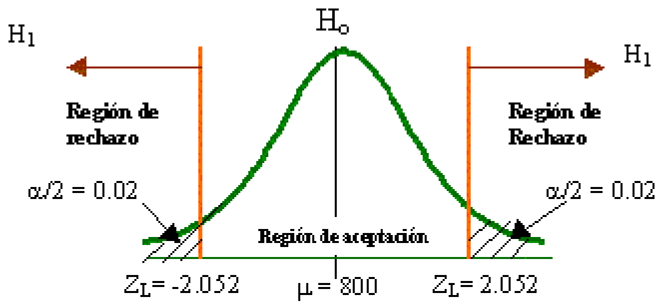
n = 30

α = 0.04

3. **Ensayo de hipótesis**

H_o; μ = 800 horas

H_1; $\mu \neq$ 800 horas



4. **Regla de Decisión:**

Si $-2.052 \leq Z_R \leq 2.052$ No se rechaza H_o

Si $Z_R < -2.052$ ó si $Z_R > 2.052$ Se rechaza H_o

5. **Cálculos:**

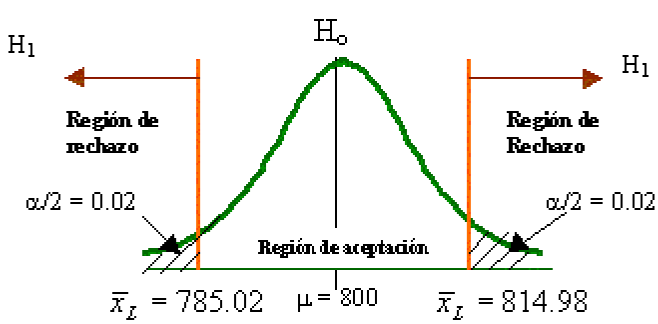
$$Z_R = \frac{\bar{x}_R - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{788 - 800}{40 / \sqrt{30}} = -1.643$$

6. **Justificación y decisión:**

Como $-2.052 \leq$ **-1.643** ≤ 2.052 por lo tanto, no se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia del 0.04 que la duración media de los focos no ha cambiado.

Solución por el otro método:

$$\bar{x}_L = \mu \pm \frac{Z_L \sigma}{\sqrt{n}} = 800 \pm \frac{(2.052)(40)}{\sqrt{30}} =$$ 785.02 y 814.98



Regla de decisión:

Si $785.02 \leq \bar{x}_R \leq 814.98$ No se rechaza H_o

Si $\bar{x}_R$ < 785.02 ó $\bar{x}_R$ > 814.98 se rechaza H_o

Como la $\bar{x}_R$ = 788 horas, entonces no se rechaza H_o y se concluye que la duración media de los focos no ha cambiado.

3. Una muestra aleatoria de 64 bolsas de palomitas de maíz pesan, en pomedio 5.23 onzas con una desviación estándar de 0.24 onzas. Pruebe la hipótesis de que μ = 5.5 onzas contra al hipótesis alternativa, μ

< 5.5 onzas en el nivel de significamcia de 0.05.

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de medias con desviación estándar desconocida, pero como el tamaño de muestra es mayor a 30 se puede tomar la desviación muestral como un estimador puntual para la poblacional.**
2. **Datos:**

μ = 5.5 onzas

s= 0.24 onzas

$\bar{x}$ = 5.23 onzas

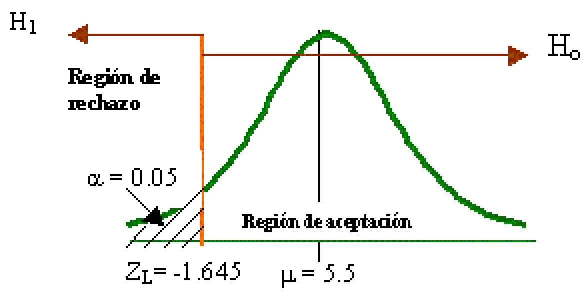
n = 64

α = 0.05

3. **Ensayo de hipótesis**

H_o; μ = 5.5 onzas

H_1; μ < 5.5 onzas



4. **Regla de decisión:**

Si $Z_R \geq$ -1.645 No se rechaza H_o

Si Z_R < -1.645 Se rechaza H_o

5. **Cálculos:**

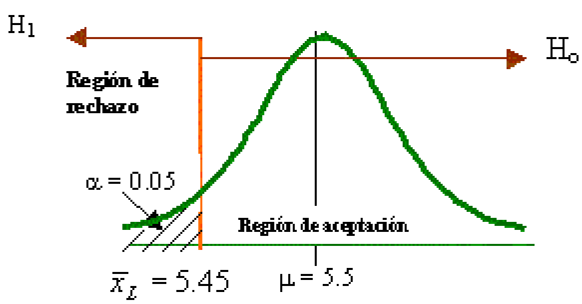
$$Z_R = \frac{\bar{x}_R - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5.23 - 5.5}{0.24/\sqrt{64}} = -9$$

6. **Justificación y decisión:**

Como –9 < -1.645 por lo tanto se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia del 0.05 que las bolsas de palomitas pesan en promedio menos de 5.5 onzas.

Solución por el otro método:

$$\bar{x}_L = \mu - \frac{Z_L \sigma}{\sqrt{n}} = 5.5 - \frac{(1.645)(0.24)}{\sqrt{64}} = 5.45$$



Regla de decisión:

Si $\bar{x}_R \geq$ 5.45 No se Rechaza H_o

Si $\bar{x}_R <$ 5.45 Se rechaza H_o

Como la $\bar{x}_R =$ 5.23 y este valor es menor que 5.45 pot lo tanto se rechaza H_o.

4. Un constructor afirma que se instalan bombas de calor en 70% de todas las casas que se construyen hoy en día en la ciudad de Richmond. ¿Estaría de acuerdo con esta afirmación si una investigación de casas nuevas en esta ciudad muestra que 8 de 15 tienen instaladas bombas de calor? Utilice un nivel de significancia de 0.10.

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de proporciones.**
2. **Datos:**

P= 0.70

p = 8/15 = 0.5333

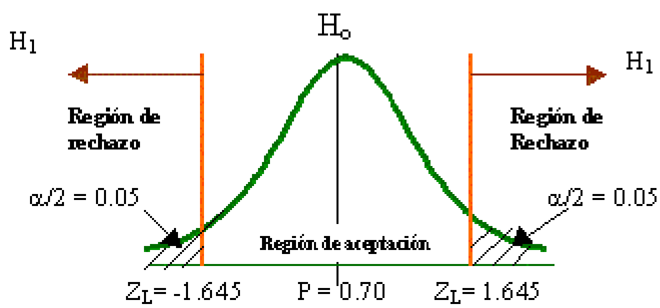
n = 15

α = 0.10

3. **Ensayo de hipótesis**

H_o; P = 0.70

H_1; P $\neq$ 0.70



4. **Regla de Decisión:**

Si –1.645 $\leq$ Z_R $\leq$ 1.645 No se rechaza H_o

Si Z_R < -1.645 ó si Z_R > 1.645 Se rechaza H_o

5. **Cálculos:**

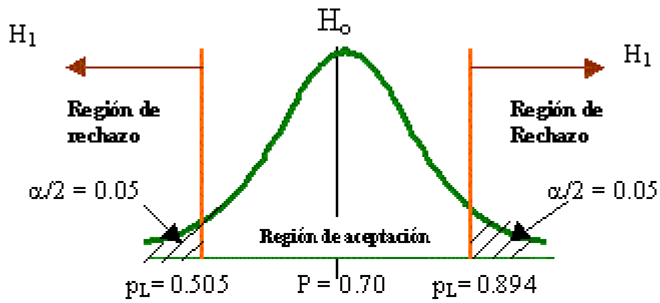
$$Z_R = \frac{p-P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} = \frac{0.533-0.70}{\sqrt{\frac{(0.70)(0.30)}{15}}} = -1.41$$

6. **Justificación y decisión:**

Como –1.645 $\leq$ **-1.41** $\leq$ 1.645 No se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia de 0.10 que la afirmación del constructor es cierta.

Solución por el otro método:

$$p_L = P \pm z_L\sqrt{\frac{Pq}{n}} = 0.70 \pm 1.645\sqrt{\frac{(0.70)(0.30)}{15}}$$ = 0.505 y 0.894



Regla de decisión:

Si 0.505 $\leq$ $p_R \leq$ 0.894 No se rechaza H_o

Si p_R < 0.505 ó si Z_R > 0.894 Se rechaza H_o

Como el valor del estadístico real es de 0.533 por lo tanto no se rechaza H_o y se llega a la misma conclusión.

5. Un fabricante de semiconductores produce controladores que se emplean en aplicaciones de motores automovilísticos. El cliente requiere que la fracción de controladores defectuosos en uno de los pasos de manufactura críticos no sea mayor que 0.05, y que el fabricante demuestre esta característica del proceso de fabricación con este nivel de calidad, utilizando α = 0.05. El fabricante de semiconductores toma una muestra aleatoria de 200 dispositivos y encuentra que cuatro de ellos son defectuosos. ¿El fabricante puede demostrar al cliente la calidad del proceso?

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de proporciones.**
2. **Datos:**

P= 0.05

p = 4/200 = 0.02

n = 200

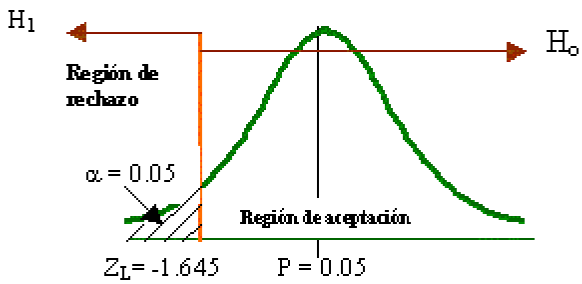
α = 0.05

α

3. **Ensayo de hipótesis**

H_o; P = 0.05

H_1; P < 0.05



4. **Regla de decisión:**

Si $Z_R \geq -1.645$ No se rechaza H_o
Si $Z_R < -1.645$ Se rechaza H_o

5. **Cálculos:**

$$Z_R = \frac{p - P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} = \frac{0.02 - 0.05}{\sqrt{\frac{(0.05)(0.95)}{200}}} = -1.946$$

6. **Justificación y decisión:**

Puesto que –1.946<-1.645, se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia del 0.05 que la fracción de artículos defectuosos es menor que 0.05.

6. Un diseñador de productos está interesado en reducir el tiempo de secado de una pintura tapa poros. Se prueban dos fórmulas de pintura; la fórmula 1 tiene el contenido químico estándar, y la fórmula 2 tiene un nuevo ingrediente secante que debe reducir el tiempo de secado. De la experiencia se sabe que la desviación estándar del tiempo de secado es ocho minutos, y esta variabilidad inherente no debe verse afectada por la adición del nuevo ingrediente. Se pintan diez especímenes con la fórmula 1, y otros diez con la fórmula 2. Los dos tiempos promedio de secado muestrales son 121 min y 112 min respectivamente. ¿A qué conclusiones puede llegar el diseñador del producto sobre la eficacia del nuevo ingrediente, utilizando α = 0.05?

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de diferencia de medias con desviación estándar conocida.**
2. **Datos:**

$\sigma_1 = \sigma_2 = 8$

$\bar{x}_1 = 121 \text{ min}$

$\bar{x}_2 = 112 \text{ min}$

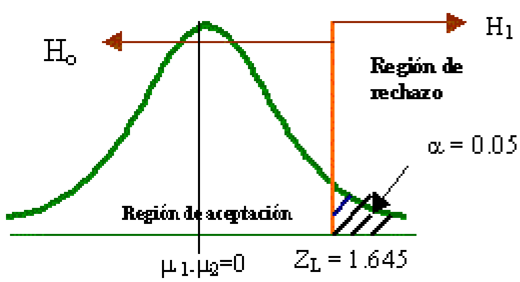
$n_1 = n_2 = 10$

$\alpha = 0.05$

3. **Ensayo de hipótesis**

H_o; $\mu_1 - \mu_2 = 0$

H_1; $\mu_1 - \mu_2 > 0$ Se desea rechazar H_o si el nuevo ingrediente disminuye el tiempo promedio de secado, por eso se pone la diferencia mayor a cero o sea positiva para poder probar que μ_2 es menor que μ_1.



4. **Regla de decisión:**

Si $z_R \leq 1.645$ no se rechaza H_o.

Si $z_R > 1.645$ se rechaza H_o.

5. **Cálculos:**

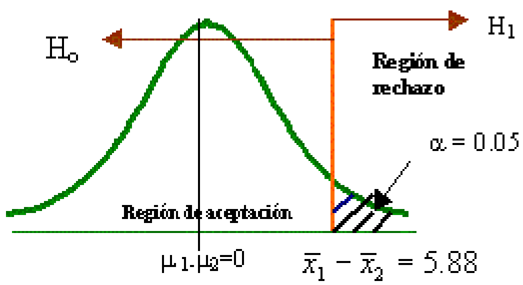
$$Z_R = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(121 - 112) - 0}{\sqrt{\frac{8^2}{10} + \frac{8^2}{10}}} = 2.52$$

6. **Justificación y decisión:**

Puesto que 2.52>1.645, se rechaza H_o, y se concluye con un nivel de significancia de 0.05 que la adición del nuevo ingrediente a la pintura si disminuye de manera significativa el tiempo promedio de secado.

Solución por el otro método:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_L = (\mu_1 - \mu_2) + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}} = 0 + 1.645\sqrt{\frac{8^2}{10} + \frac{8^2}{10}} = 5.88$$



Regla de decisión:

Si $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R \leq$ 5.88 No se rechaza H_o

Si $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R$ > 5.88 Se rechaza H_o

Puesto que $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R$ = 121-112 = 9 y este número es mayor a 5.88 por lo tanto se rechaza H_o.

7. Se utilizan dos máquinas para llenar botellas de plástico con un volumen neto de 16.0 onzas. Las distribuciones de los volúmenes de llenado pueden suponerse normales, con desviaciones estándar σ_1= 0.020 y σ_2 = 0.025 onzas. Un miembro del grupo de ingeniería de calidad sospecha que el volumen neto de llenado de ambas máquinas es el mismo, sin importar si éste es o no de 16 onzas. De cada máquina se toma una muestra aleatoria de 10 botellas. ¿Se encuentra el ingeniero en lo correcto? Utilice α = 0.05

MAQUINA 1		**MAQUINA 2**	
16.03	16.01	16.02	16.03
16.04	15.96	15.97	16.04
16.05	15.98	15.96	16.02

16.05	16.02	16.01	16.01
16.02	15.99	15.99	16.00

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de diferencia de medias con desviación estándar conocida.**

2. **Datos:**

$\sigma_1 = 0.020$

$\sigma_2 = 0.025$

$\bar{x}_1 = 16.015$ Este dato se obtuvo calculando la media de los datos en la máquina 1.

$\bar{x}_2 = 16.005$ Este dato se obtuvo calculando la media de los datos en la máquina 2.

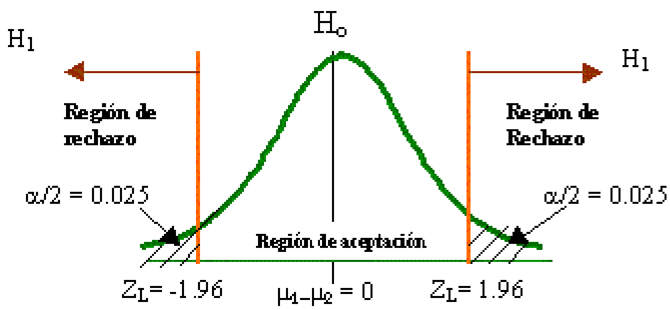
$n_1 = n_2 = 10$

$\alpha = 0.05$

3. **Ensayo de hipótesis**

H_o; $\mu_1 - \mu_2 = 0$

H_1; $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ Si se cae en H_o se podrá probar que el volumen de llenado es el mismo en las dos máquinas.



4. **Regla de Decisión:**

Si $-1.96 \leq Z_R \leq 1.96$ No se rechaza H_o

Si $Z_R < -1.96$ ó si $Z_R > 1.96$ Se rechaza H_o

5. **Cálculos:**

$$Z_R = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(16.015 - 16.005) - 0}{\sqrt{\frac{0.020^2}{10} + \frac{0.025^2}{10}}} = 0.987$$

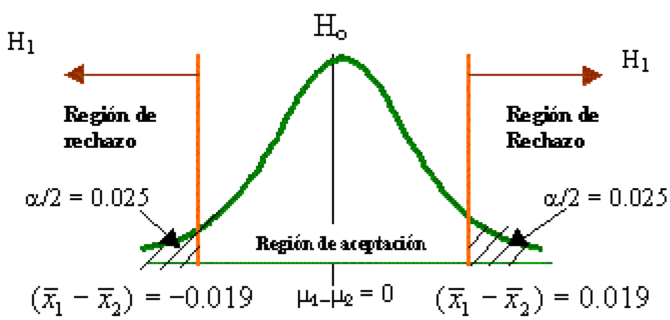
6. **Justificación y decisión:**

Como –1.96 $\leq$ **0.987** $\leq$ 1.96 entonces no se rechaza H_o y se concluye con un nivel de significancia de 0.05 que las dos máquinas tienen en promedio la misma cantidad de llenado.

Solución por el otro método:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_L = (\mu_1 - \mu_2) \pm z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}} = 0 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.020^2}{10} + \frac{0.025^2}{10}} =$$

-0.019 y 0.019



Regla de decisión:

Si –0-019 $\leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R \leq$ 0.019 No se rechaza H_o

Si $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R <$ -0.019 ó $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R >$ 0.019 Se rechaza H_o

Como $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R =$ 16.015 – 16.005 = 0.01, entonces cae en la región de aceptación y no se rechaza H_o.

8. Existen dos tipos de plástico apropiados para su uso por un fabricante de componentes electrónicos. La tensión de ruptura de ese plástico es un parámetro importante . Se sabe que $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.0$ psi. De una muestra aleatoria de tamaño 10 y 12 para cada plástico respectivamente, se tiene una media de 162.5 para el plástico 1 y de 155 para el plástico 2. La compañía no adoptará el plástico 1 a menos que la tensión de ruptura de éste exceda a

la del plástico 2 al menos por 10 psi. Con base a la información contenida en la muestra, ¿la compañía deberá utilizar el plástico 1? Utilice α = 0.05 para llegar a una decisión.

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de diferencia de medias con desviación estándar conocida.**
2. **Datos:**

$\sigma_1 = \sigma_2 = 1.0$ psi

$\bar{x}_1 = 162.5 psi$

$\bar{x}_2 = 155 psi$

$n_1 = 10$

$n_2 = 12$

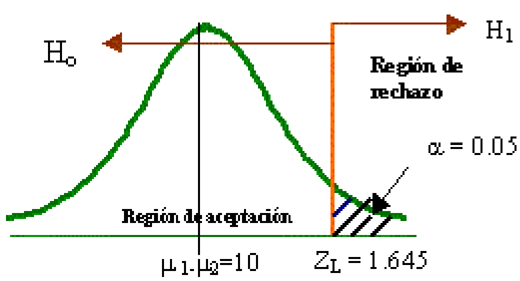
α = 0.05

3. **Ensayo de hipótesis**

H_o; $\mu_1 - \mu_2 = 10$

H_1; $\mu_1 - \mu_2 > 10$

Se desea rechazar H_o si la media del plástico 1 supera a la media del plástico 2 en por lo menos 10 psi.



4. **Regla de decisión:**

Si $z_R \leq$ 1.645 no se rechaza H_o.

Si $z_R >$ 1.645 se rechaza H_o.

5. **Cálculos:**

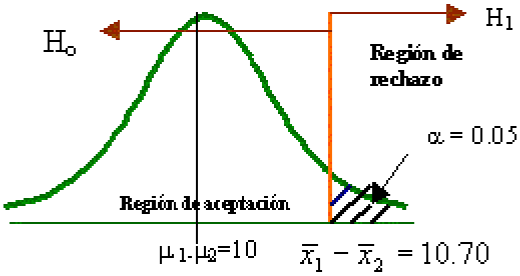
$$Z_R = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(162.5 - 155) - 10}{\sqrt{\frac{1^2}{10} + \frac{1^2}{12}}} = -5.83$$

6. **Justificación y decisión:**

No existe evidencia suficiente para apoyar el uso del plástico 1 ya que $-5.83 \leq 1.645$, por lo tanto no se rechaza H_o.

Solución por el otro método:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_L = (\mu_1 - \mu_2) + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}} = 10 + 1.645\sqrt{\frac{1^2}{10} + \frac{1^2}{12}} = 10.70$$



Regla de decisión:

Si $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R \leq 10.70$ No se rechaza H_o

Si $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R > 10.70$ Se rechaza H_o

Puesto que $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_R = 162.5\text{-}155 = 7.5$ y este número es no es mayor a 10.7 por lo tanto no se rechaza H_o.

8. Se evalúan dos tipos diferentes de soluciones para pulir, para su posible uso en una operación de pulido en la fabricación de lentes intraoculares utilizados en el ojo humano después de una cirugía de cataratas. Se pulen 300 lentes con la primera solución y, de éstos, 253 no presentaron defectos inducidos por el pulido. Después se pulen otros 300 lentes con la segunda solución, de los cuales 196 resultan satisfactorios. ¿Existe alguna razón para creer que las dos soluciones para pulir son diferentes? Utilice α

= 0.01

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de diferencia de proporciones.**
2. **Datos:**

p_1= 253/300= 0.8433

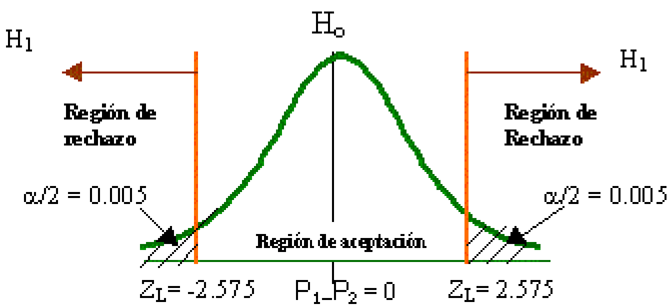
p_2 = 196/300= 0.6533

n_1=n_2 = 300

3. **Ensayo de hipótesis:**

H_o; P_1-P_2 = 0

H_1; P_1-$P_2 \neq$ 0



4. **Regla de Decisión:**

Si –2.575$\leq$ $Z_R \leq$ 2.575 No se rechaza H_o

Si Z_R < -2.575 ó si Z_R > 2.575 Se rechaza H_o

5. **Cálculos:**

$$Z_R = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}}$$

En esta fórmula se puede observar que en el denominador se tienen a las proporciones poblacionales o sea los parámetros, los cuales no se conocen, por lo que en el ensayo de hipótesis la fórmula para poder calcular la Z_R cambia, estimando a el parámetro común P de la siguiente forma:

$$P = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \text{ ó bien } \quad P = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

Entonces la fórmula de Z_R quedaría de la siguiente manera:

$$Z_R = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{Pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Se calculará el valor de P:

$$P = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{253 + 196}{300 + 300} = 0.7483$$

$$Z_R = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{Pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0.8433 - 0.6533) - 0}{\sqrt{(0.7483)(0.2517)\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{300}\right)}} = 5.36$$

6. **Justificación y decisión:**

Puesto que 5.36>2.575, se rechaza la hipótesis nula y se concluye con un nivel de significancia de 0.01 que los dos fluidos para pulir son diferentes.

10. Se tomará el voto entre los residentes de una ciudad y el condado circundante para determinar si se debe construir una planta química propuesta. El lugar de construcción está dentro de los límites de la ciudad y por esta razón muchos votantes del condado consideran que la propuesta pasará debido a la gran proporción de votantes que favorecen la construcción. Para determinar si hay una diferencia significativa en la proporción de votantes de la ciudad y votantes del condado que favorecen la propuesta, se realiza una encuesta. Si 120 de 200 votantes de la ciudad favorecen la propuesta y 240 de 500 residentes del condado también lo hacen, ¿estaría de acuerdo en que la proporción de votantes de la ciudad que favorecen la propuesta es más alto que la proporción de votantes del condado? Utilice un nivel de significancia de 0.025.

Solución:

1. **Se trata de una distribución muestral de diferencia de proporciones.**
2. **Datos:**

p_1= 120/200= 0.60

p_2 = 240/500= 0.48

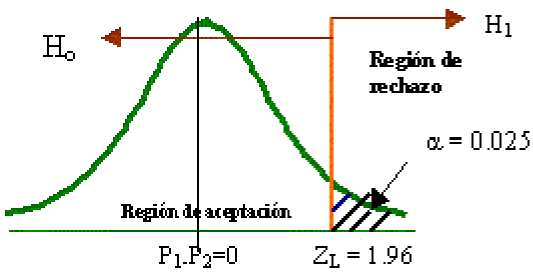
n_1 = 200

n_2 = 500

3. **Ensayo de hipótesis:**

H_o; P_1-P_2 = 0

H_1; P_1-P_2 > 0



4. **Regla de decisión:**

Si $z_R \leq$ 1.96 no se rechaza H_o.

Si z_R> 1.96 se rechaza H_o.

5. **Cálculos:**

Se calculará el valor de P:

$$P = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{120 + 240}{200 + 500} = 0.51$$

$$Z_R = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{Pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0.60 - 0.48) - 0}{\sqrt{(0.51)(0.49)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{500}\right)}} = 2.9$$

6. **Justificación y decisión:**

Puesto que 2.9>1.96, se rechaza la hipótesis nula y se concluye con un nivel de significancia de 0.025 que la proporción de votantes de la ciudad a favor de la propuesta es más alta que la proporción de votantes del condado.

En este ejercicio no nos manejan ningún valor de α, por lo que se procederá a plantear el ensayo y luego calcular z para poder conocer el valor de P y llegar a una conclusión.

1. **Ensayo de hipótesis**

H_o; μ = 20,000 kilómetros.

H_1; μ> 20,000 kilómetros.

2. Cálculos:

$$Z_R = \frac{\bar{x}_R - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{23500 - 20000}{3900 / \sqrt{100}} = 8.97$$

3. **Decisión.**

Se observa que este valor de Z es muy grande, ni siquiera se encuentra en la tabla, entonces quiere decir que el área a la derecha de ese valor es **cero** y este sería el valor de P, por lo que no apoya a la hipótesis nula y se concluye que los automóviles se manejan en promedio más de 20,000 kilómetros por año.