Tutorial: Diagramas de Árbol.

L.C. y Mtro. Francisco Javier Cruz Ariza

Universidad Nacional Autónoma de México

DIAGRAMAS DE ÁRBOL (LEY DE LA MULTIPLICACIÓN)

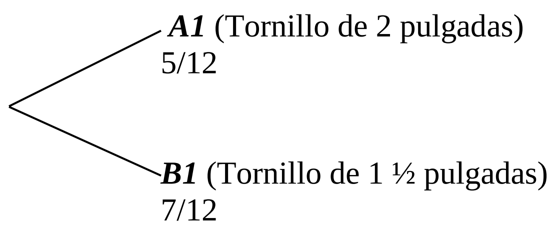
1er. Caso: Eventos secuenciales sin reemplazo.

Consideremos el siguiente experimento:

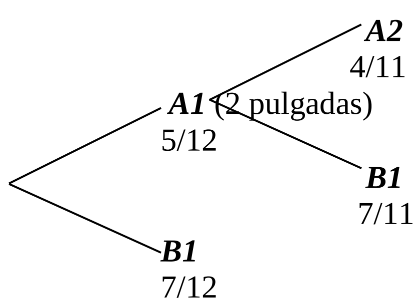
De una caja que contiene 5 tornillos de 2 pulgadas y 7 del 1 y media pulgadas, se extraen 2 tornillos en forma sucesiva y sin reposición.

- Cuando nos referimos a que extraemos dos tornillos sin reposición, significa que, al principio del experimento, tenemos 12 tornillos, tras hacer nuestra primer extracción, únicamente nos quedan 11 tornillos, descontando el primero que sacamos.

- En nuestra primer extracción, tenemos únicamente 2 posibilidades: extraer un tornillo de dos pulgadas (cuya probabilidad es 5/12, ya que son 5 los de esta medida de entre el total de tornillos disponibles), o bien, uno de 1 ½ pulgadas (cuya probabilidad es de 7/12, por la misma razón). El planteamiento inicial se muestra a continuación:

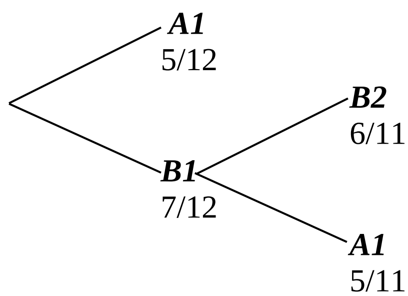


- Para la segunda extracción, hay que tener en cuenta lo siguiente:
  - De los 12 tornillos originales que teníamos, solo nos quedarían 11.
  - Pudieron haber pasado cualquiera de los dos eventos, que hayamos sacado un tornillo de 2 pulgadas, o de 1 ½. Pensando que el primer tornillo hubiera sido de 2 pulgadas, en la siguiente extracción pudiera ocurrir lo siguiente:



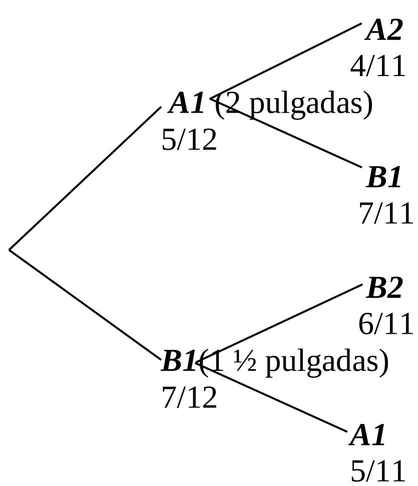
- Cabe resaltar que al evento “extraer un tornillo de 2 pulgadas en la segunda extracción” se le ha denominado como *A2* debido a que en la primer extracción se obtuvo el mismo resultado; esto significa que tendríamos ya el segundo tornillo de 2 pulgadas.
- También pudiera ocurrir que, en vez de este resultado, extrajéramos un tornillo de 1 ½ pulgadas; como éste sería nuestro primer tornillo de estas características, llamamos al evento *B1*. Su probabilidad de ocurrencia es de 7/11, ya que seguimos teniendo los mismos 7 tornillos de esta medida, pero de un total de solamente 11, por el primero que ya sacamos previamente.

- Ahora veamos qué posibles resultados encontramos teniendo en cuenta que, el primer tornillo que extrajimos, era de 1 ½ pulgadas (*B1*):



- Podemos apreciar que la probabilidad de que extraigamos el segundo tornillo de 1 ½ pulgadas (*B2*), baja a 6/11. Esto se debe a que ya tenemos solamente ésta cantidad de tornillos de ésta dimensión, por el que sacamos anteriormente.
- En cuanto a la posibilidad de que en esta segunda extracción obtengamos uno de 2 pulgadas (*A1*), es de 5/11, ya que del total que nos queda, seguimos contando con los 5 de estas dimensiones, ya que anteriormente sacamos uno de 1 ½.

- Finalmente, nuestro diagrama quedaría de la siguiente manera:

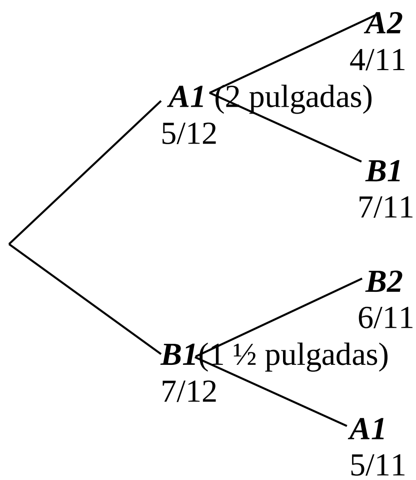


- El siguiente paso, es obtener nuestro espacio muestral. Esto significa, determinar la probabilidad de que ocurra cualquiera de todos los posibles resultados de este experimento de estudio.

- Como estamos hablando de eventos consecutivos, en donde el resultado del primer evento influye en el resultado del segundo (segunda extracción en este caso), empleamos la Ley de la Multiplicación de la Probabilidad.

- Esta Ley nos dice que, para saber la posibilidad de ocurrencia de dos eventos, tenemos que multiplicar la probabilidad de cada uno de los eventos en cuestión.

- En el primer caso, tenemos:

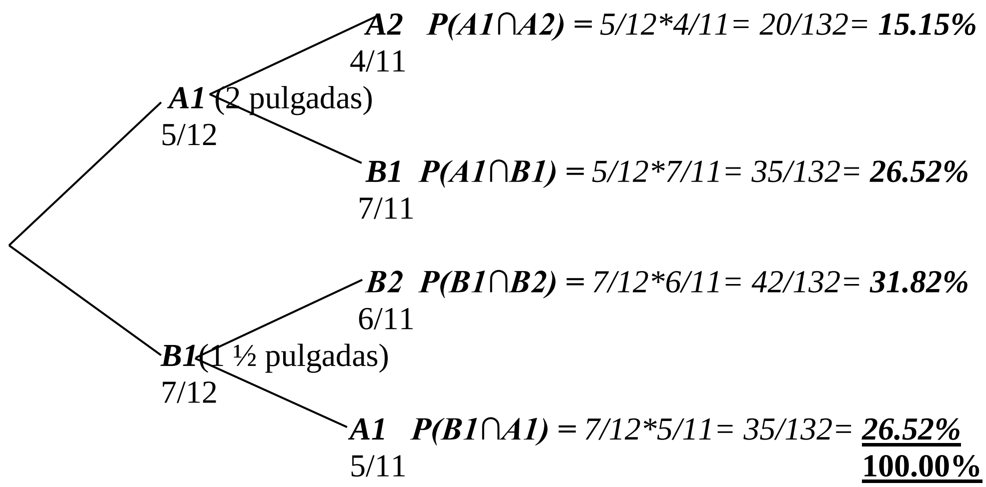


P(A1∩A2) =** 5/12*4/11= 20/132=* ***15.15%

- Se leería: La probabilidad de ocurrerencia (*P*) de que extraigamos el primer tornillo de 2 pulgadas (*A1)* **<u>Y</u>** el segundo también (*A2*), ***(A1∩A2***). Recordemos que el nexo "*y*" implica intersección de conjuntos.

- Para obtener esta intersección, de acuerdo a la Ley de la Multiplicación, tenemos que multiplicar la probabilidad de ambos eventos:
    - *P(A1)*= 5/12
    - *P(A2)* = 4/11
    - *P(A1∩A2)* **=** *5/12*4/11= 20/132=* ***15.15%***

- Del mismo modo, procedemos a calcular la probabilidad del resto de eventos en nuestro espacio muestral:



- Como podemos apreciar, la suma de todas las probabilidades nos da el 100%, ya que no hay ningún otro evento factible de que suceda.

- Si observamos con detenimiento, observaremos que ***P(A1∩B1) y P(B1∩A1)*** tienen la misma probabilidad de ocurrencia; esto es, el 26.52%. Esto se debe a que en realidad se trata del *mismo evento*, solo que ocurriendo en distinto orden.

    - En ***P(A1∩B1)*** en la primer extracción obtuvimos un tornillo de 2 pulgadas, y en la segunda uno de 1 ½ pulgadas.
    - En ***P(B1∩A1)*** obtuvimos un tornillo de 1 ½ pulgadas en la primer extracción, y en la segunda uno de 2 pulgadas.
    - Como podemos apreciar, el orden de los factores, no altera el producto…

¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Los dos tornillos sean del mismo tamaño:

$$\underbrace{P\,(A1 \cap A2)}_{\text{Ambos de 2 pulgadas}} + \underbrace{P\,(B1 \cap B2)}_{\text{Ambos de 1 1/2 pulgadas}} = 15.15 + 31.82 = \mathbf{46.97\ \%}$$

- Como podemos apreciar, tenemos que sumar ambas probabilidades, ya que los dos eventos cumplen con la condición, de extraer dos tornillos del mismo tamaño.

b) Los 2 sean de 1 ½ pulgadas:

$P(B1 \cap B2) = \mathbf{31.82\ \%}$

- Se refiere a una rama muy específica del árbol.

c) El primero sea de 2 pulgadas y el segundo de 1 y media:

$P(A1 \cap B1) = \mathbf{26.51\ \%}$

d) Uno sea de 1 y media y el otro de 2 pulgadas?
NOTA: Tenga presente que no se está pidiendo, como en el caso anterior, el orden en que se extraen los dos tornillos. En consecuencia, se debe tener en cuenta la probabilidad de que el primer tornillo sea de 2 pulgadas y el segundo de 1 ½ y sumarle la probabilidad de que el primero sea de 1 ½ y el segundo de 2:

$$\underbrace{P(A1 \cap B1)}_{\text{1er opción}} + \underbrace{P(B1 \cap A1)}_{\text{2° opción}} = 26.51 + 26.51 = 53.02\ \%$$

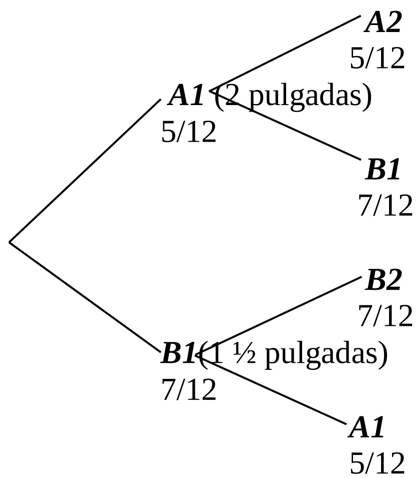
2°. Caso: Eventos secuenciales con reemplazo.

Consideremos el mismo experimento:

De una caja que contiene 5 tornillos de 2 pulgadas y 7 del 1 y media pulgadas, se extraen 2 tornillos en forma sucesiva y sin reposición.

- Cuando nos referimos a que extraemos dos tornillos con reposición, significa que, al principio del experimento, tenemos 12 tornillos, tras hacer nuestra primer extracción, únicamente nos quedan 11 tornillos, pero a diferencia del caso anterior, lo devolvemos al recipiente. En consecuencia, siempre tendremos 12 tornillos.

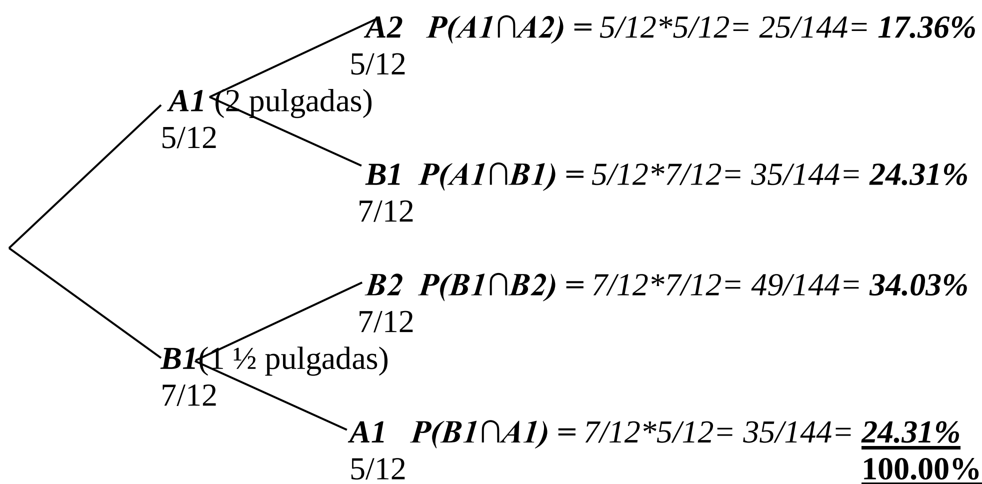
- Considerando lo anterior, nuestro diagrama quedaría de la siguiente manera:



- Como podemos apreciar, la posibilidad de extraer un tornillo de cada una de las dimensiones, SIEMPRE será la siguiente:

  - *P(A)*= 5/12 → Extraer un tornillo de 2 pulgadas (independientemente si es el primero o el segundo).
  - *P(B)* = 7/12 → Extraer un tornillo de 1 ½ pulgadas (independientemente si es el primero o el segundo).

- Del mismo modo, procedemos a calcular la probabilidad del resto de eventos en nuestro espacio muestral:



- Como podemos apreciar, la suma de todas las probabilidades nos da el 100%, ya que no hay ningún otro evento factible de que suceda.

¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Los dos tornillos sean del mismo tamaño:

P (A1 ∩ ***A2) + P (B1*** ∩ ***B2)*** **=** 17.36 + 34.03 **= 51.39 %** (Para mayor detalle, ver este mismo inciso, en el procedimiento anterior).

e) Los 2 sean de 1 ½ pulgadas:

P (B1 ∩ B2) ***= 34.03 %***

- Se refiere a una rama muy específica del árbol.

f) El primero sea de 2 pulgadas y el segundo de 1 y media:

P (A1 ∩ B1) = **24.31 %**

g) Uno sea de 1 y media y el otro de 2 pulgadas?
NOTA: Tenga presente que no se está pidiendo, como en el caso anterior, el orden en que se extraen los dos tornillos. En consecuencia, se debe tener en cuenta la probabilidad de que el primer tornillo sea de 2 pulgadas y el segundo de 1 ½ y sumarle la probabilidad de que el primero sea de 1 ½ y el segundo de 2:

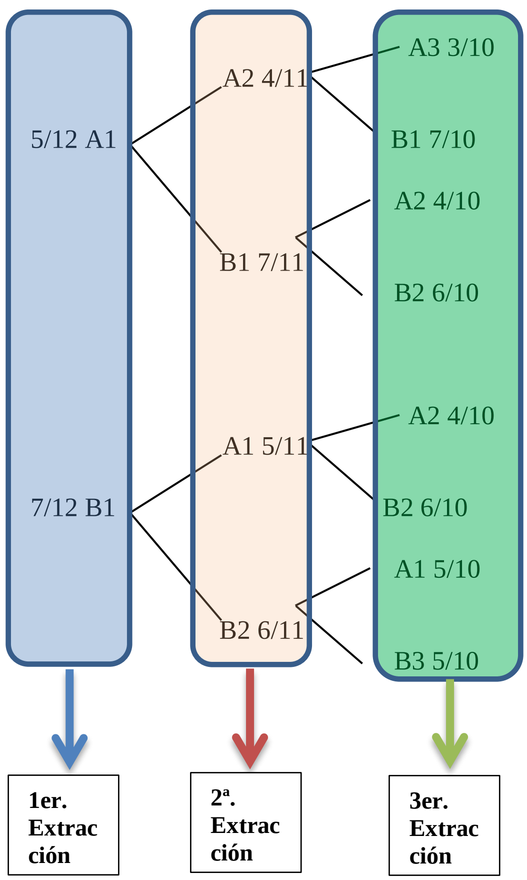
P (A1 ∩B1) + P (B1 ∩ A1) = 24.31 + 24.31 = **48.62 %**

Como puede apreciarse, los resultados de los incisos varían en función a si hay o no reemplazo del tornillo extraído.

3er. Caso: 3 eventos secuenciales sin reemplazo.

Consideremos el mismo experimento, pero ahora contemplado que se hace una tercer extracción, sin reemplazo:

De una caja que contiene 5 tornillos de 2 pulgadas y 7 del 1 y media pulgadas, se extraen 3 tornillos en forma sucesiva y sin reposición.



$P(A1\cap A2\cap A3) = (5/12)(4/11)(3/10)=$ **4.55%**

$P(A1\cap A2\cap B1) = (5/12)(4/11)(7/10)=$ **10.61%**

$P(A1\cap B1\cap A2)= (5/12)(7/11)(4/10)=$ **10.61%**

$P(A1\cap B1\cap B2)= (5/12)(7/11)(6/10)=$ **15.91%**

$P(B1\cap A1\cap A2) = (7/12)(5/11)(4/10)=$ **10.61%**

$P(B1\cap A1\cap B2) = (7/12)(5/11)(6/10)=$ **15.91%**

$P(B1\cap B2\cap A1)= (7/12)(6/11)(5/10)=$ **15.91%**

$P(B1\cap B2\cap B3)= (7/12)(6/11)(5/10)=$ **15.91%**

100.00%

4°. Caso: 3 eventos secuenciales con reemplazo.

Consideremos el mismo experimento, pero ahora contemplado que se hace una tercer extracción, con reemplazo:

De una caja que contiene 5 tornillos de 2 pulgadas y 7 del 1 y media pulgadas, se extraen 3 tornillos en forma sucesiva, reponiendo el primer tornillo extraído al recipiente de donde se van sacando.

5/12 A1	A2 5/12	A3 5/12	$P(A1 \cap A2 \cap A3)$ = (5/12) (5/12) (5/12)= **7.23%**
		B1 7/12	$P(A1 \cap A2 \cap B1)$ = (5/12(5/12) (7/12)= **10.13%**
	B1 7/12	A2 5/12	$P(A1 \cap B1 \cap A2)$= (5/12)(7/12) (5/12)= **10.13%**
		B2 7/12	$P(A1 \cap B1 \cap B2)$= (5/12)(7/12)(7/12)= **14.18%**
7/12 B1	A1 5/12	A2 5/12	$P(B1 \cap A1 \cap A2)$ = (7/12)(5/12) (5/12)= **10.13%**
		B2 7/12	$P(B1 \cap A1 \cap B2)$ = (7/12)(5/12)(7/12)= **14.18%**
	B2 7/12	A1 5/12	$P(B1 \cap B2 \cap A1)$= (7/12)(7/12)(5/12)= **14.18%**
		B3 7/12	$P(B1 \cap B2 \cap B3)$= (7/12) (7/12) (7/12)= **19.85%**
			100.00%